



بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر

کلیک کنید  www.tafrihicenter.ir/edu

 نمونه سوال  گام به گام

 امتحان نهایی  جزوه

 دانلود آزمون های آزمایشی

متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم

متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم

www.tafrihicenter.ir



بندر سیراف شهر باستانی استان بوشهر یکی از مکان های تاریخی و از نقاط دیدنی ایران است که زمانی قارای روش جنگری بوده و در آن زمان با سصد هزار نفر جمعیت روابط تجاری زیادی با روم و یونان و روم و ملایکامکار در آفریقا، هند و چین (در آسیا) داشت است. تا این همه زمین لرزه شدید در قرن چهارم هجری قمری ویران شدن کامل این بندر را در پی داشت.

آشنایی با برخی از انواع توابع

وارون یک تابع و تابع یک به یک

اعمال جبری روی توابع

درس اول

درس دوم

درس سوم

آشنایی با برخی از انواع توابع

در سال گذشته با مفهوم تابع آشنا شدیم. به دستور یا قانون بیانگر تابع، ضابطه آن تابع گفته می‌شود. برای مشخص کردن یک تابع، باید دامنه تابع و ضابطه آن را داشته باشیم. بنا به قرارداد، اگر ضابطه تابعی داده شده باشد، اما دامنه آن صریحاً گفته نشده باشد، بزرگ‌ترین مجموعه‌ای که آن تابع در آن قابل تعریف است، به عنوان دامنه در نظر گرفته می‌شود.

نواع گونا

فعالیت

حسین در پایه یازدهم درس می‌خواند. او در روستای کوچکی زندگی می‌کند که در چند کیلومتری یکی از جاده‌های پرتردد ایران قرار دارد. مردم این روستا تا چند سال پیش به کشاورزی و باغداری مشغول بودند، اما چند سالی است که به دلیل کم‌آبی، کشاورزی رونقی ندارد و در نتیجه مردم این روستا درآمد کافی ندارند. حسین تصمیم گرفت این وضع را تغییر دهد. برای این منظور با خود اندیشید که باید فضای روستا را زیباتر کند و با تبلیغاتی مناسب، بخشی از افرادی که قصد گردشگری دارند و معمولاً از جاده اصلی کنار روستا می‌گذرند را به روستای خود جلب کند. او با خود فکر کرد این گردشگران بابت پذیرایی محلی و تجربه خوشایند یک زندگی روستایی، هزینه خواهند پرداخت و به این ترتیب جریحه اقتصادی مردم روستا پر رونق خواهد شد.

پس از چند هفته تحقیق و پرس و جو، حسین به این نتیجه رسید که برای شروع کار به حدوداً ده میلیون تومان نیاز دارد که البته او به تنهایی این پول را نداشت. برای همین تصمیم گرفت ابتکار خود را با دیگران مطرح کند و از آنها هم برای این کار مفید یاری بخواهد. به این ترتیب افراد روستا می‌توانستند با سرمایه‌گذاری به نسبت مساوی در راه‌اندازی این کار اقتصادی سهم شوند.

۱ الف) اگر حسین تنها شخص شرکت کننده در این طرح بود، او به تنهایی می‌بایست $\frac{1}{1}$ از ده میلیون تومان را بپردازد، اما اگر یک داوطلب دیگر هم پیدا می‌شد، هر کدام باید $\frac{1}{2}$ از ده میلیون تومان را بپردازند. جدول زیر را کامل کنید.

تعداد افراد داوطلب	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
سهم مشارکت هر داوطلب	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$

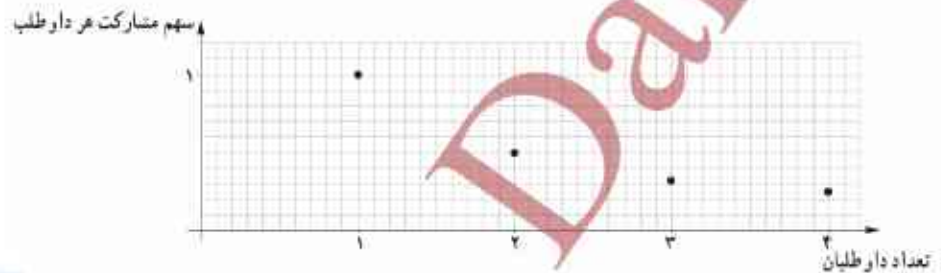
ب) اگر تعداد داوطلبانی که می‌خواهند در این کار اقتصادی شرکت کنند، n نفر باشد، سهم مشارکت هر نفر چقدر خواهد شد؟ $\frac{1}{n}$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

پ) رابطه بین تعداد افراد داوطلب و سهم مشارکت آنها یک تابع است. ضابطه این تابع چیست؟

۲ در شکل زیر، بخشی از نمودار تابع سهم مشارکت رسم شده است. با انتخاب گزینه مناسب در عبارت زیر، تعیین کنید که این نمودار چه چیزی را نشان می‌دهد؟
 «با افزایش تعداد داوطلبان، سهم مشارکت هر داوطلب کاهش ☒ افزایش ☐ می‌یابد».

این نمودار نشان می‌دهد که با افزایش تعداد افراد سهم مشارکت هر فرد کاهش می‌یابد.



فعالیت

خواندنی

هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی رودخانه‌ای با تابع با ضابطه $p(x) = \frac{255x}{100-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $p(x)$ هزینه پاک‌سازی بر حسب میلیون تومان است.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

ب) با یک میلیارد تومان چه درصدی از آلودگی‌های این رودخانه پاک‌سازی خواهد شد؟

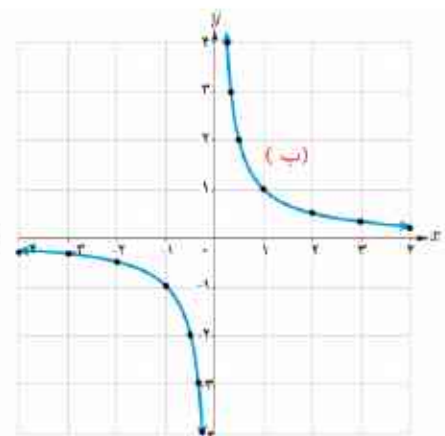
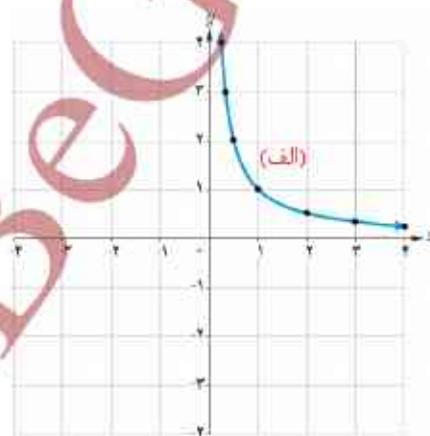
ب) چرا هیچ‌گاه ۱۰۰ درصد از آلودگی‌های این رودخانه پاک‌سازی نمی‌شود؟

x	۱۰	۳۰	۵۰	۷۰	۹۰
$p(x)$	۲۸/۳	۱۰۹/۳	۲۵۵	۵۹۵	۲۲۹۵

در نمودارهای زیر تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ با دو دامنه متفاوت رسم شده است. مشخص کنید که هر کدام از این نمودارها مربوط به کدام دامنه است؟

الف) $D_f = (0; +\infty)$

ب) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$



هر تابع به شکل $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم. که در آن $P(x)$ ، $Q(x)$ چند جمله‌ای هستند و چند جمله‌ای $Q(x)$ صفر نیست.

$$p(10) = \frac{255 \times 10}{100 - 10} = \frac{2550}{90} = 28\frac{1}{3} \quad \text{الف)}$$

$$p(30) = \frac{255 \times 30}{100 - 30} = \frac{7650}{70} = 109\frac{1}{7} \quad \text{ب)}$$

$$p(50) = \frac{255 \times 50}{100 - 50} = \frac{12750}{50} = 255$$

$$p(70) = \frac{255 \times 70}{100 - 70} = \frac{17850}{30} = 595$$

$$p(90) = \frac{255 \times 90}{100 - 90} = \frac{22950}{10} = 2295$$

$$1000 = \frac{255x}{100 - x} \Rightarrow 100000 - 1000x = 255x \Rightarrow 100000 = 1255x$$

$$\Rightarrow x = \frac{100000}{1255} \approx 79\frac{1}{6} \approx 80$$

ب)

تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ و همچنین توابع زیر نمونه‌هایی از توابع گویا هستند.

$$f(x) = \frac{x}{x+5}$$

$$f(x) = \frac{x+3}{x-10}$$

$$f(x) = \sqrt{5x}$$

$$f(x) = 2$$

کار در کلاس

یکی از معیارهای بررسی موفقیت یک بازیکن بسکتبال، بررسی «عملکرد پرتاب‌های آزاد» اوست. به این منظور، نسبت پرتاب‌های آزاد موفق هر بازیکن را به همه پرتاب‌های آزاد حساب می‌کنند. وحیده که عضو تیم بسکتبال مدرسه است، یک بازیکن موفق است، زیرا در مسابقات امسال، تا امروز، از ۱۰ پرتاب آزاد، ۷ پرتاب او موفق بوده است. بنابراین ۷۰ درصد پرتاب‌های آزاد او موفق بوده است. او دوست دارد عملکردش بهتر از این باشد.

الف) اگر تا پایان مسابقات همه پرتاب‌های آزاد وحیده موفق باشد، ضابطه تابع عملکرد پرتاب‌های آزاد او به کدام صورت زیر است؟

$$f(x) = x + 0.7 \quad f(x) = \frac{x}{0.7 + x} \quad f(x) = \frac{7 + x}{10 + x}$$

نسبت پرتاب‌های موفق وحیده به کل پرتاب‌های او $\frac{7}{10}$ است حالا اگر فرض کنیم که او x پرتاب موفق دیگر انجام دهد پس به ۷ پرتاب موفق قبلی x و به کل پرتاب‌ها هم x تا پرتاب اضافه می‌شود و نسبت پرتاب‌های موفق جدید به کل پرتاب‌های جدید به صورت $\frac{7+x}{10+x}$ خواهد بود. بنابراین ضابطه ی تابع پرتاب‌های موفق وحیده $f(x) = \frac{7+x}{10+x}$ است.

ب) آیا تابع عملکرد پرتاب‌های آزاد وحیده، یک تابع گویاست؟

بله زیرا صورت و مخرج کسر یک چندجمله‌ای است. و همچنین مخرج صفر نیست زیرا تعداد پرتاب‌ها که x است متغی نیست و یا عدد ۱۰ هم که جمع شود صفر نمی‌شود.

پ) توضیح دهید که پس از چند پرتاب آزاد موفق بیای دیگر، درصد موفقیت عملکرد وحیده ۸۰ درصد خواهد شد؟

$$f(x) = \frac{80}{100} \rightarrow \frac{7+x}{10+x} = \frac{80}{100} \rightarrow 100x + 700 = 80x + 800 \rightarrow 20x = 100 \rightarrow x = 5$$

دامنه توابع گویا

از سال‌های گذشته می‌دانیم مخرج هیچ کسری نمی‌تواند صفر باشد؛ بنابراین عدد صفر در دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ نیست. به طوری‌که اعدادی که مخرج کسر مربوط به ضابطه یک تابع گویا را صفر کنند، عضو دامنه آن تابع نیستند. به عنوان مثال، دامنه تابع گویای با ضابطه $f(x) = \frac{5}{x-2}$ برابر $\mathbb{R} - \{2\}$ است.

کار در کلاس

دامنه هر یک از توابع گویای داده شده را به دست آورید.

$$f(x) = \frac{x}{x+5}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-5\}$$

$$g(x) = \frac{3}{x-2}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{2\}$$

دو تابع f و g را برابر نامیم هرگاه:

الف) دامنه f و دامنه g با هم برابر باشند.

ب) برای هر x از این دامنه یکسان داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

بنابراین در صورت رسم نمودارهای دو تابع مساوی در یک دستگاه مختصات، باید نمودارهای آنها دقیقاً بر هم منطبق شوند.

به نمودار دو تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x}{x}$ و $g(x) = 2$ دقت کنید.



می بینیم که نمودارهای این دو تابع کاملاً بر هم منطبق نیستند. در واقع با اینکه ضابطه دو تابع شبیه هم هستند و در صورت ساده شدن x ، ضابطه های دو تابع برابر می شوند ولی دامنه دو تابع با هم متفاوت اند، زیرا داریم:

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

در نتیجه این دو تابع با هم برابر نیستند.

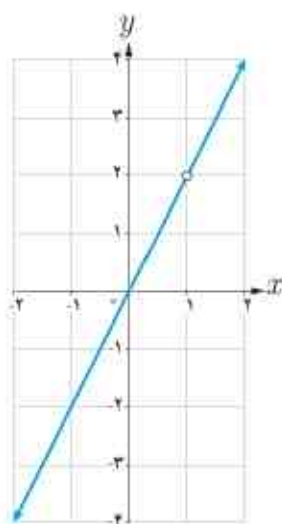
تذکر: همواره دامنه تابع را قبل از ساده کردن ضابطه آن محاسبه می کنیم.

۱ آیا دو تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2}{x}$ و $g(x) = x$ با هم برابرند؟ چرا؟

خیر زیرا وقتی تابع $f(x)$ را ساده می کنیم، ضابطه ی دو تابع برابر می شود ولی دامنه ها باهم برابر نیستند پس این دو تابع با هم برابر نیستند.

$$f(x) = \frac{x^2}{x} = x$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\} \quad , \quad D_g = \mathbb{R}$$



۲ نمودار مقابل مربوط به کدام یک از توابع زیر است؟ مسئله چند جواب دارد؟

(الف) $g(x) = 2x$ $D_g = \mathbb{R}$

(ب) $g(x) = 2x$ $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$

(پ) $g(x) = 2x$ $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

(ت) $g(x) = \frac{2x^2 - 2x}{x-1}$ $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

(ث) $g(x) = \frac{2x^2 - 4x}{x-2}$ $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$

با توجه به شکل دامنه ی تابع عبارت است از : $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$ ینا براین دامنه آن با قسمت های

(پ) و (ت) یکی است اما باید ضابطه های هر کدام از این قسمت ها را هم بررسی کنیم.

$$g(x) = \frac{2x^2 - 2x}{x-1} = \frac{2x(x-1)}{(x-1)} \xrightarrow{D_g = \mathbb{R} - \{1\}} g(x) = 2x$$

می دانیم نقاط $(0,0)$ و $(-1,-2)$ روی نمودار این تابع قرار دارند و در ضابطه تابع $g(x) = 2x$ صدق می کنند.

$$g(x) = 2x \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2 \times 0 \Rightarrow 0 = 0 \\ -2 = 2 \times (-1) \Rightarrow -2 = -2 \end{cases}$$

توابع رادیکالی

کار در کلاس

بر اساس مشاهدات دانشمندان، اگر S ، تندی جابه جایی یک سونامی بر حسب کیلومتر بر ساعت باشد، می توان آن را از رابطه $S = 356\sqrt{d}$ محاسبه کرد که در آن d میانگین عمق دریا بر حسب کیلومتر است.

(الف) جدول زیر را کامل کنید. ($\sqrt{3} = 1/7$ ، $\sqrt{2} = 1/4$)

d	۱	۲	۳	۴
$S = 356\sqrt{d}$	۳۵۶	۴۹۸/۴	تقریباً ۶۰۵/۲	۷۱۲

(ب) عبارت زیر را کامل کنید.

چون هر عدد، تنها **یک** ریشه دوم مثبت دارد، پس رابطه سونامی یک تابع است.

(پ) کدام یک از اعداد ۵- و ۵ عضو دامنه تابع سونامی است؟

عدد ۵ عضو دامنه تابع سونامی است.

خواندنی

سونامی (آبلرزه) به لرزش شدید آب دریا گفته می شود. این اتفاق ممکن است در بی زمین لرزه های زیر دریا، لغزیدن صخره، انفجار آتشفشانی و یا هر حادثه دیگری که انرژی زیادی در دریا آزاد می کند، رخ دهد. این که به لرزه درآمده است، به شکل موج های عظیم به کرانه ها می رسد و ویرانی به بار می آورد. سونامی زمانی شروع می شود که حجم عظیمی از آب، به سرعت مرتفع شود. تندی موج های سونامی بسته به محل رویداد، ممکن است به بیش از ۸۰۰ کیلومتر در ساعت برسد!

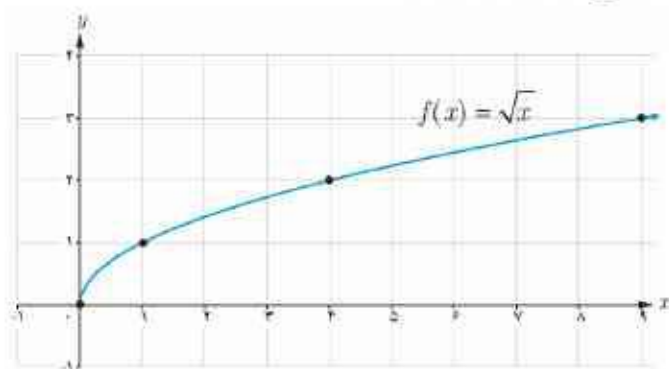
یکی از بزرگترین سونامی ها در سال ۱۳۸۳ در نزدیکی سوماترای اندونزی روی داد و باعث ویرانی عظیمی شد و حدود ۲۰۰ هزار نفر را به کام مرگ گشتاباند.



در کتاب های تاریخ ادعا شده است که قسمت بزرگی از بندر باستانی سیراف ناگهان بر اثر زمین لرزه ای به زیر آب رفته است. پاسخ دقیق این سؤال را که «آیا یک سونامی سیراف را ویران کرده و به زیر آب برده است؟» باید با کمک پژوهش های باستان شناسی و زمین شناسی یافت. با توجه به اینکه میانگین عمق خلیج فارس حدود ۵ متر است، نظر شما چیست؟

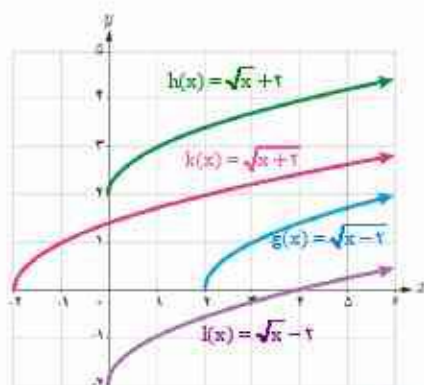
مطالعه توابع رادیکالی مانند $S = 356\sqrt{d}$ به دلیل نقش کاربردی آنهاست. در این کتاب با برخی از توابع رادیکالی آشنا می‌شویم. همان‌طور که هنگام کار با تابع رادیکالی سونامی دیدید، دامنه این نوع توابع ممکن است همه اعداد حقیقی نباشد.

ساده‌ترین تابع رادیکالی تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ است. دامنه این تابع مجموعه همه اعداد حقیقی نامنفی و نمودار آن به‌صورت زیر است.



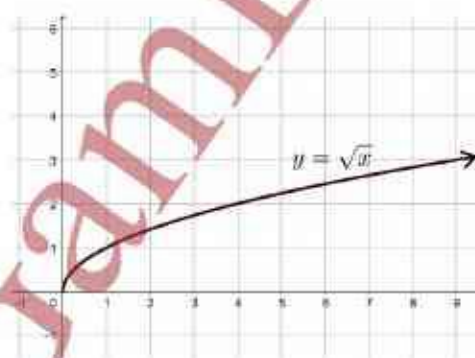
فعالیت

۱ در شکل مقابل با کمک انتقال نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، نمودار مربوط به هر یک از توابع زیر رسم شده است. مشخص کنید که هر نمودار، مربوط به کدام تابع است. سپس دامنه آنها را تعیین کنید.

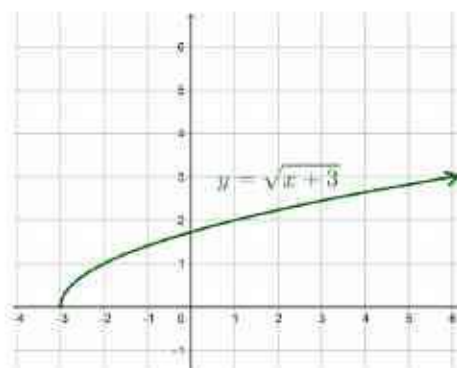


الف) $g(x) = \sqrt{x} - 2$ $D_g = [-2, +\infty)$ ب) $h(x) = \sqrt{x} + 2$ $D_h = [0, +\infty)$
ب) $k(x) = \sqrt{x} + 1$ $D_k = [-1, +\infty)$ ت) $l(x) = \sqrt{x} - 1$ $D_l = [0, +\infty)$

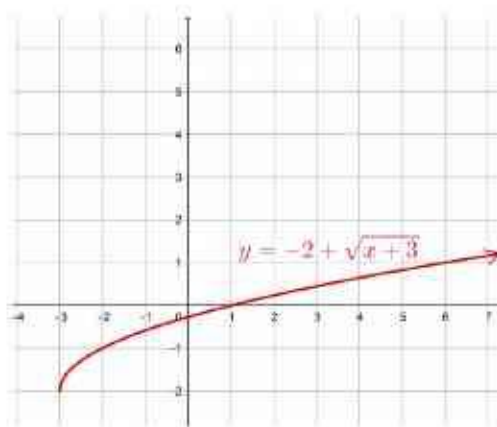
۲ می‌خواهیم نمودار تابع با ضابطه $y = -2 + \sqrt{x+3}$ را رسم کنیم.
الف) (مرحله اول) نمودار تابع با ضابطه $y = \sqrt{x}$ در صفحه قبل را در نظر بگیرید.
ب) (مرحله دوم) حال، نمودار تابع با ضابطه $y = \sqrt{x+3}$ را رسم کنید.



(الف) مرحله اول

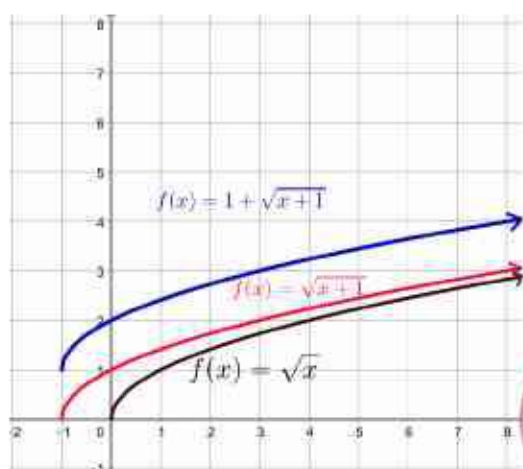


(ب) مرحله دوم



ب) (مرحله سوم) در پایان، نمودار تابع با ضابطه $y = -2 + \sqrt{x+3}$ را رسم کنید. با توجه به شکل می بینید که دامنه این تابع $[-3, +\infty)$ است.

۳ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$ را رسم کنید؛ سپس دامنه آن را بیابید.



$$D_f = [-1, +\infty)$$

نواحی پله‌ای و تابع جزء صحیح

فعالیت

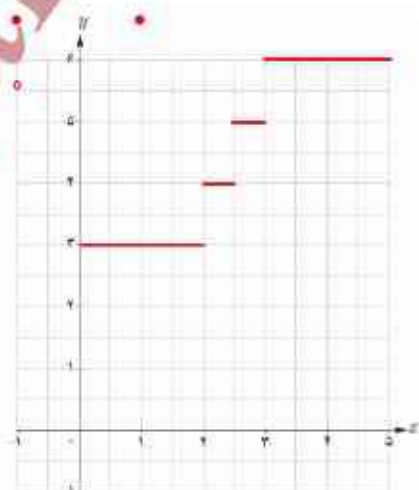
هزینه پارکینگ خودرو

در یک پارکینگ، هزینه پارک خودرو به این صورت محاسبه می شود:

الف) ضابطه تابع هزینه پارکینگ خودرو چیست؟

هزینه (هزار تومان)	زمان
۳	از هنگام ورود تا کمتر از ۲ ساعت
۴	از ۲ ساعت تا ۲/۵ ساعت
۵	از بیشتر از ۲/۵ ساعت تا کمتر از ۳ ساعت
۶	از ۳ ساعت تا ۵ ساعت

$$f(x) = \begin{cases} 3 & 0 \leq x < 2 \\ 4 & 2 \leq x \leq 2.5 \\ 5 & 2.5 < x < 3 \\ 6 & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$



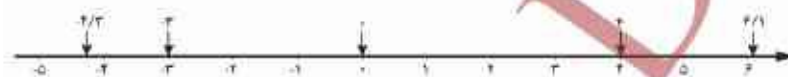
ب) نمودار این تابع را رسم کنید.

به توابعی مانند تابع هزینه پارکینگ، توابع پله‌ای می‌گویند. توابع پله‌ای در تجارت با خرید و فروش نقش تعیین‌کننده‌ای دارند. مشهورترین تابع پله‌ای، تابع جزء صحیح است.

تابع جزء صحیح به هر عدد صحیح، خود همان عدد صحیح را نسبت می‌دهد و به هر عدد غیر صحیح، بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از آن عدد را نسبت می‌دهد. ضابطه این تابع به صورت $f(x) = [x]$ نشان داده می‌شود.

برای مثال داریم:

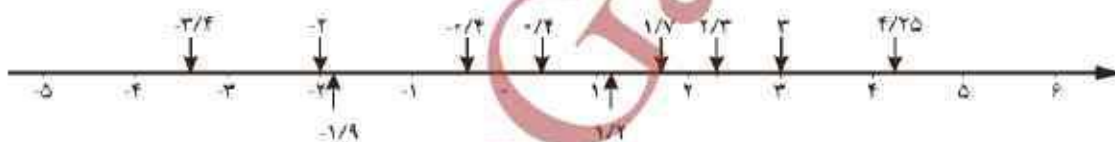
$$[4] = 4 \quad [6/8] = 6 \quad [0] = 0 \quad [-2/3] = -5 \quad [-3] = -3$$



همان‌طور که در مثال دیدیم، جزء صحیح هر عدد غیر صحیح، برابر است با اولین عدد صحیح سمت چپ آن روی محور اعداد.

کار در کلاس

۱ با کمک گرفتن از محور اعداد، جزء صحیح اعداد خواسته شده را به دست آورید.



$$[-3/4] = -4 \quad [-2] = -2 \quad [-1/9] = -2 \quad [0/4] = 0 \quad [-0/4] = -1$$

$$[4/25] = 4 \quad [3] = 3 \quad [2/3] = 2 \quad [1/7] = 1 \quad [1/2] = 1$$

۲ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\left[\frac{41}{37}\right] = [1/108] = 1 \quad \left[-\frac{13}{51}\right] = [-0/254] = -1$$

فعالیت

۱ اگر $[x] = 2$ ، آنگاه x برابر چه اعدادی می‌تواند باشد؟ مجموعه جواب را به صورت

$$[x] = 2 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \Rightarrow x \in [2, 3)$$

بازه بنویسید.

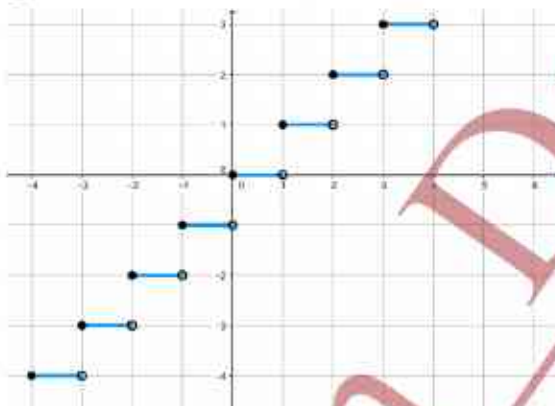
خواندنی

برای قیمت گذاری یک محصول تولیدی خاص، قیمت مواد اولیه تعیین کننده است؛ اما بالا و پایین رفتن های جزئی قیمت مواد اولیه، قیمت یک محصول را تغییر نمی دهد. بنابراین به اعداد بازه ای از قیمت های مواد اولیه، تنها یک قیمت نهایی محصول را نسبت می دهند. به این ترتیب، تابع مورد نظر یک تابع پله ای است.

خواندنی

با مراجعه به وب گاه رسمی سامانه محاسبه نرخ مرسولات پستی شرکت ملی پست (<http://parcelprice.post.ir>) می توانید دو شهر را انتخاب کنید. سپس تابع پله ای هزینه ارسال یک بسته را بر حسب وزن - قیمت مشاهده کنید.

۲ برای رسم نمودار یک تابع صحیح باید توجه کنیم که اعداد هر بازه ای از دامنه، به چه عددی نسبت داده می شود. برای مثال اگر $0 \leq x < 1$ ، آنگاه $[x] = 0$ ؛ پس مقدار تابع $f(x) = [x]$ برای همه اعداد عضو بازه $[0, 1)$ برابر صفر می شود. در شکل مقابل بخشی از نمودار تابع با ضابطه $f(x) = [x]$ رسم شده است. نمودار این تابع را در بازه $(-4, 4)$ تکمیل کنید.



۳ الف) به دلخواه نقطه ای مانند a را روی محور اعداد داده شده مشخص کنید.

ب) نقطه $a + 3$ را روی این محور مشخص کنید.

پ) نقاط $[a]$ و $[a + 3]$ را روی محور مشخص کنید.



ت) چه رابطه ای بین $[a]$ و $[a + 3]$ برقرار است؟

ث) چه نتیجه ای می گیرید؟

«اگر a عددی حقیقی و n عددی صحیح باشد، آنگاه $[a + n] = [a] + n$ »

تمرین

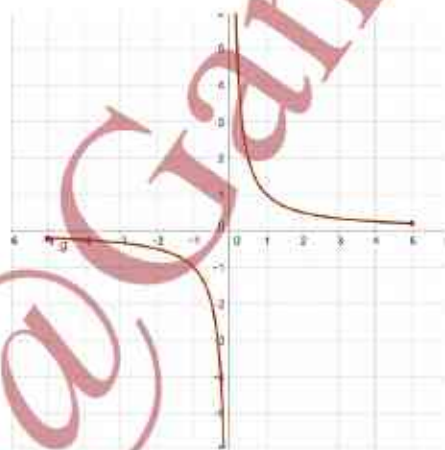
۱ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ و با دامنه $D_f = [-5, 5] - \{0\}$ را رسم کنید.

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad D_f = [-5, 5] - \{0\}$$

۲ دامنه تابع گویای با ضابطه $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$ را به دست آورید.

کافی است عددی را که مخرج را صفر می کند از مجموعه ی اعداد حقیقی

حذف کنیم. بنابراین داریم: $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$



تهیه و تنظیم: عطیه تبریزی

۳ در هر مورد آیا دو تابع داده شده با هم برابرند؟

الف) $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \frac{|x|}{x}$

الف) دامنه این دو تابع با هم برابر است. $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0\}$.

پس از ساده کردن تابع g مشاهده می کنیم که ضابطه این دو تابع نیز با هم برابر است :

$$\left. \begin{aligned} x > 0 &\Rightarrow g(x) = \frac{x}{x} = 1 \\ x < 0 &\Rightarrow g(x) = \frac{-x}{x} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

ب) $f(x) = x - 2$, $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

$D_f = \mathbb{R}$

$D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$

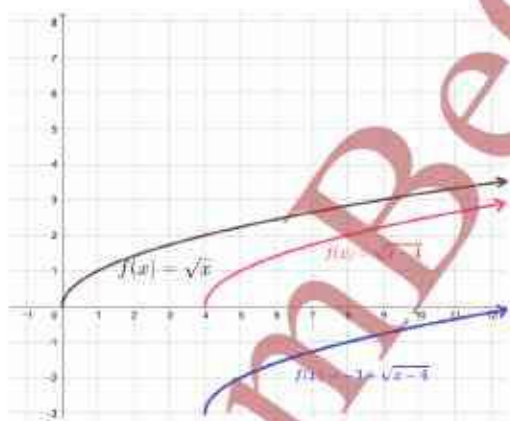
پ) می دانیم دامنه ی این دو تابع عبارت است از :

با وجود این که اگر $g(x)$ را ساده کنیم ضابطه ی آن با ضابطه ی $f(x)$ برابر می شود اما چون دامنه ها برابر نیستند نمی توانیم بگوییم که دو تابع برابر هستند.

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x + 2)} = x - 2$$

۴ تابعی گویا بنویسید که دامنه اش برابر $\mathbb{R} - \{-1\}$ شود. پاسخ خود را با جواب دوستانان مقایسه کنید.

$f(x) = \frac{x+2}{x+1}$, $g(x) = \frac{x}{x^2+x}$



۵ نمودار تابع با ضابطه $g(x) = -3 + \sqrt{x-4}$ را رسم کنید.

۶ حاصل عبارت های مقابل را حساب کنید.

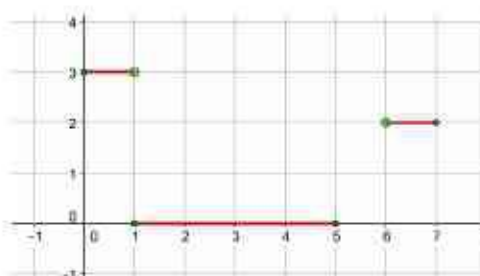
$[300/4002] = 300$

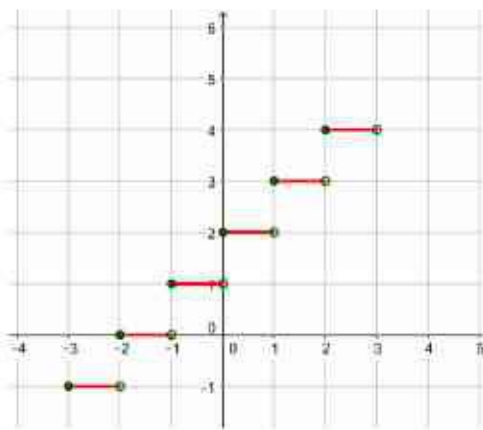
$[-103/003] = -104$

$[-2309/54] = -2310$

۷ تابع پله ای رویه زو را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \in [0, 1) \\ 0 & x \in [1, 5] \\ 2 & x \in (5, 7] \end{cases}$$





۸ تابع با ضابطه $f(x) = [x] + 2$ و دامنه $D_f = [-3, 3]$ را رسم کنید.

$$f(x) = -3 + 2 = -1 \quad -3 \leq x < -2$$

$$f(x) = -2 + 2 = 0 \quad -2 \leq x < -1$$

$$f(x) = -1 + 2 = 1 \quad -1 \leq x < 0$$

$$f(x) = 0 + 2 = 2 \quad 0 \leq x < 1$$

$$f(x) = 1 + 2 = 3 \quad 1 \leq x < 2$$

$$f(x) = 2 + 2 = 4 \quad 2 \leq x < 3$$

خواندنی

تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ به طور تقریبی

قد متوسط کودکان را بر حسب

سانتی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان

می‌دهد. در این تابع x نشان دهنده

مادهای پس از تولد است.

قد متوسط یک کودک ۹ ماهه تقریباً

چقدر است؟

در چه سنی قد متوسط یک کودک

تقریباً یک متر می‌شود؟



۱- کودکان حاضر در تصویر، فرزندان شهدای مدافع حرم هستند.

$$f(x) = 7\sqrt{x} + 50$$

$$f(9) = 7\sqrt{9} + 50 = 21 + 50 = 71 \text{ cm}$$

$$100 = 7\sqrt{x} + 50 \Rightarrow 50 = 7\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{50}{7} \Rightarrow x = \frac{2500}{49} \approx 51$$

قد متوسط یک کودک ۹ ماهه تقریباً ۷۱ سانتی متر است.

در سن تقریباً ۵۱ ماهگی کودک تقریباً یک متر می‌شود.

وارون یک تابع

کار در کلاس



الف) هر مایل تقریباً $\frac{1}{6}$ کیلومتر است. تعیین کنید که هر یک از جملات سمت راست مربوط به کدام یک از رابطه‌های سمت چپ است.

$$f(x) = \frac{1}{5}x$$

این رابطه برای تبدیل تقریبی «مایل» به «کیلومتر» است.

$$g(x) = \frac{5}{8}x$$

این رابطه برای تبدیل تقریبی «کیلومتر» به «مایل» است.

ب) تندی 30 مایل بر ساعت تقریباً معادل تندی چند کیلومتر بر ساعت است؟ $f(30) = \frac{1}{5} \times 30 = 6 \text{ km/h}$

هر تابع با ضابطه $y=f(x)$ بیان می‌کند که متغیر y چه ارتباطی با متغیر x دارد و چگونه می‌توان با در دست داشتن مقدار x ، مقدار y را به دست آورد. اما گاهی مهم است که بدانیم چگونه می‌توان از مقدار y به مقدار x رسید. تبدیل یکای اندازه‌گیری نمونه‌ای ساده از این حالت است.

به خاطر دارید که یک تابع را می‌توان با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نشان داد.

خواندنی

سال‌هاست که ریاضی‌دانان، با کمک داده‌های آماری جمعیت، تلاش می‌کنند به تابع تخمین جمعیت دست یابند و در این زمینه به نتایجی هم رسیده‌اند. این تابع نشان می‌دهد که مثلاً در سال ۱۴۲۰ جمعیت ایران چه تعداد خواهد بود. با این همه، در عمل معمولاً وارون این تابع نیز اهمیت دارد؛ به عنوان مثال مهم است که مشخص کنیم در چه سالی جمعیت ایران به ۱۰۰ میلیون نفر خواهد رسید. در فصل پنجم با نمونه‌ای از توابع تخمین جمعیت آشنا خواهیم شد.

با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج مرتب (a,b) می‌توان زوج مرتب (b,a) را به دست آورد. حال اگر مؤلفه‌های همه زوج‌های مرتب تابع f را جابه‌جا کنیم، رابطه جدیدی به دست می‌آید که آن را وارون تابع f می‌گوییم و با f^{-1} نشان می‌دهیم.

برای مثال وارون تابع $f = \{(6,4), (5,3), (2,1)\}$ برابر با $f^{-1} = \{(4,6), (3,5), (1,2)\}$ است.

کار در کلاس

وارون تابع‌های داده شده را حساب کنید.

$$s = \{(4,1), (1,4), (3,3), (2,5)\}$$

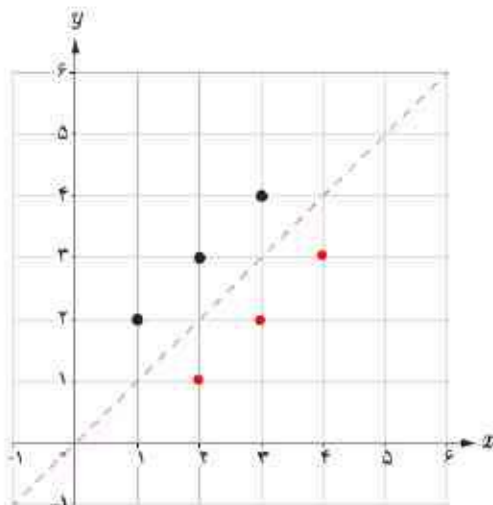
$$s^{-1} = \{(1,4), (4,1), (3,3), (5,2)\}$$

$$t = \{(5,1), (1,4), (4,3), (2,3)\}$$

$$t^{-1} = \{(1,5), (4,1), (3,4), (3,2)\}$$

$$u = \{(2,3), (5,2), (4,1), (3,4)\}$$

$$u^{-1} = \{(3,2), (2,5), (1,4), (4,3)\}$$



۱ در دستگاه مختصات داده شده نمودار تابع f رسم شده است.

الف) تابع f را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید.

$$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$$

ب) تابع f^{-1} را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید.

$$f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$$

پ) در همین دستگاه مختصات، نمودار f^{-1} را رسم کنید.

ت) نمودار f و f^{-1} چه ارتباطی با هم دارند؟

نمودارها دو طرف خطچین قرمز رنگ قرار دارند و نسبت به این خط قرینه اند زیرا اگر هر نقطه را روی نمودار f به نقطه

نظیرش روی نمودار f^{-1} وصل کنیم این خط عمود منصف پاره خط ایجاد شده خواهد بود.

«نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینه یکدیگرند.»

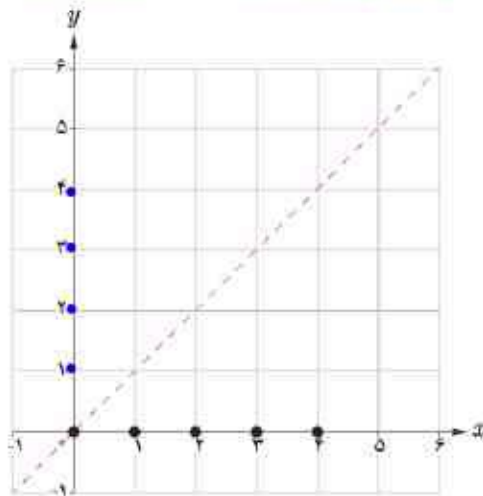
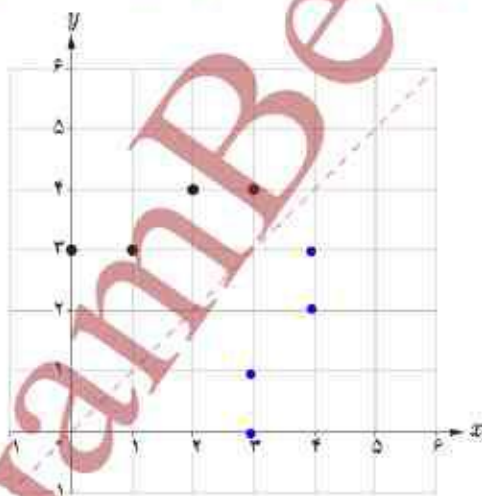
۲ الف) در هر مورد بیان کنید چرا نمودار داده شده معرف یک تابع است و سپس وارون

آن را رسم کنید.

نمودارها معرف یک تابع هستند زیرا برای هر x فقط یک y وجود دارد.

می‌توانیم خط‌هایی موازی محور y را رسم کنیم ملاحظه می‌شود که نمودارها فقط در یک نقطه این خطوط را قطع خواهند

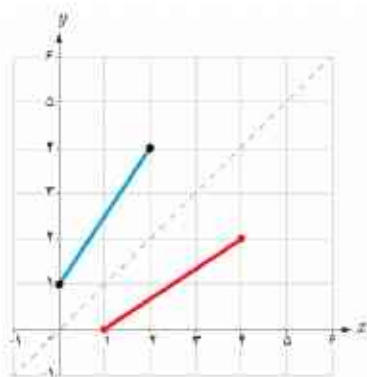
کرد. همچنین می‌توانیم هر یک از توابع را به صورت زوج مرتب نمایش دهیم و مشاهده می‌کنیم که مؤلفه اول تکراری نداریم.



ب) عبارت زیر را کامل کنید.

برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است که قرینه نمودار آن تابع را نسبت به

خط $y=x$ رسم کنید.

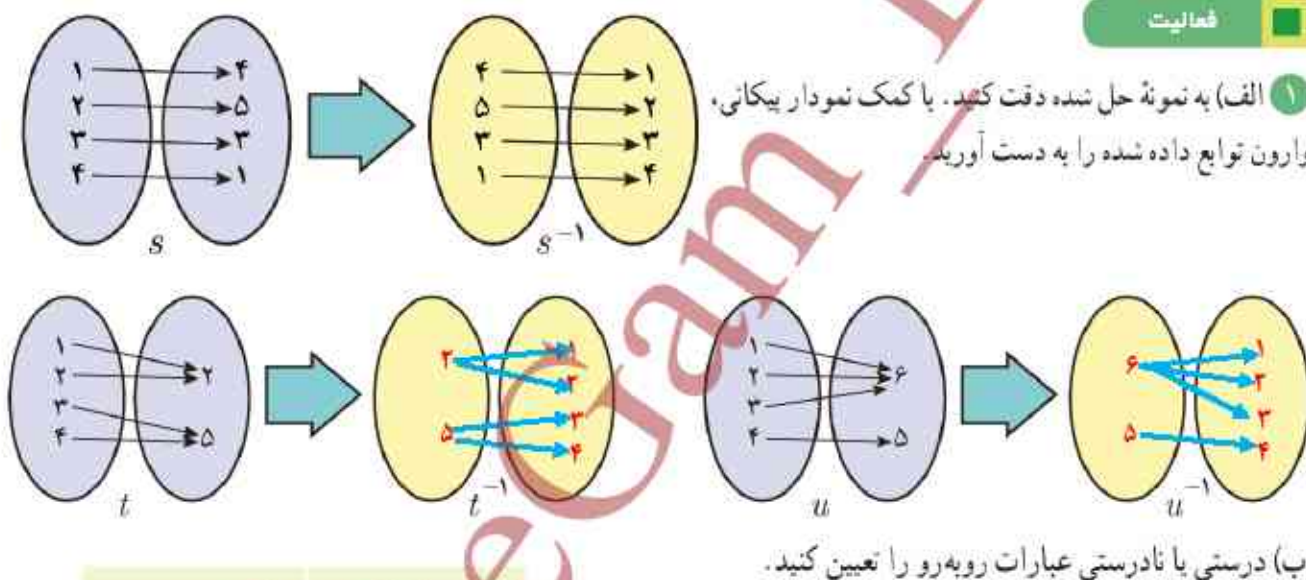


۳ نمودار وارون تابع داده شده را رسم کنید.

تابع یک به یک

فعالیت

۱ الف) به نمونه حل شده دقت کنید. با کمک نمودار یکانی، وارون توابع داده شده را به دست آورید.



ب) درستی یا نادرستی عبارات روبه‌رو را تعیین کنید.

☐ بله ☐ خیر	s^{-1} یک تابع است.
☐ بله ☐ خیر	t^{-1} یک تابع است.
☐ بله ☐ خیر	u^{-1} یک تابع است.

ب) عبارت زیر را کامل کنید.

وارون تابع f ، خود یک تابع است هرگاه در زوج‌های مرتب متفاوت تابع f مؤلفه‌های **دوم** تکراری وجود نداشته باشد.

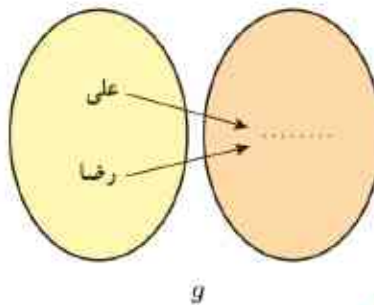
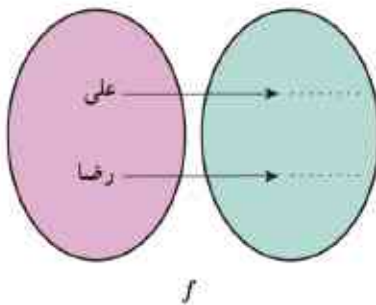
به تابعی که در زوج‌های مرتب متفاوت خود مؤلفه‌های دوم تکراری نداشته باشد، تابع یک به یک می‌گویند.

تذکر: وارون هر تابع یک به یک، خود یک تابع است.

ت) تابع $f = \{(1, 2), (-2, 4), (2, -1), (-1, 2)\}$ را در نظر بگیرید. بدون محاسبه f^{-1} ، تعیین کنید که این تابع یک به یک است یا خیر؟

خیر، زیرا همانطور می‌بینیم مؤلفه‌های دوم در زوج‌های مرتب متفاوت تکراری است پس این تابع یک به یک نیست.

۲ نمودارهای یکانی زیر بیانگر تابع اثر انگشت و تابع گروه خونی علی و رضا است.



الف) مشخص کنید که کدام نمودار یکانی مربوط به اثر انگشت و کدام نمودار یکانی مربوط به گروه خونی است.

نمودار پیکانی f مربوط به اثر انگشت و نمودار پیکانی g مربوط به گروه خونی است.

ب) آیا f و g هر دو تابع اند؟

بله هر دو تابع هستند زیرا هر شخص فقط یک اثر انگشت و یک نوع گروه خونی دارد.

ب) در مورد تابع بودن f^{-1} و g^{-1} چه می توان گفت؟

f^{-1} تابع است اما g^{-1} تابع نیست.

ت) کدام یک از دو تابع f و g یک به یک هستند؟

تابع f یک به یک است ولی تابع g یک به یک نیست.

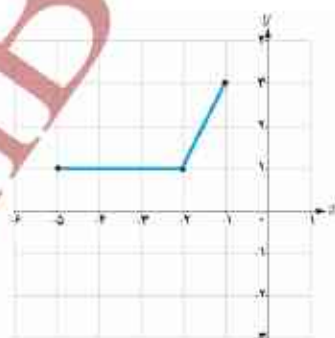
ث) عبارات زیر را کامل کنید.

با دانستن گروه خونی یک انسان، هویت او به طور یکتا تعیین نمی شود.

با دانستن اثر انگشت یک انسان، هویت او به طور یکتا تعیین می شود.

فعالیت

۱ در شکل داده شده، با وصل کردن نقاط مشخص شده به هم، نموداری رسم کنید که تابع باشد.



الف) آیا تابعی که رسم کرده اید یک به یک است؟

خیر یک به یک نیست زیرا نقاطی که روی پاره خط موازی محور طول ها قرار دارند همگی یک عرض دارند به عبارتی نقاط متفاوت مؤلفه ی دوم یکسان دارند.

ب) با کامل کردن عبارت زیر مشخص کنید که چگونه با در دست داشتن نمودار یک تابع،

می توان تشخیص داد که آیا آن تابع یک به یک است یا خیر؟

اگر هر خط موازی محور طول ها (x ها) نمودار یک تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آن گاه آن تابع یک به یک است.

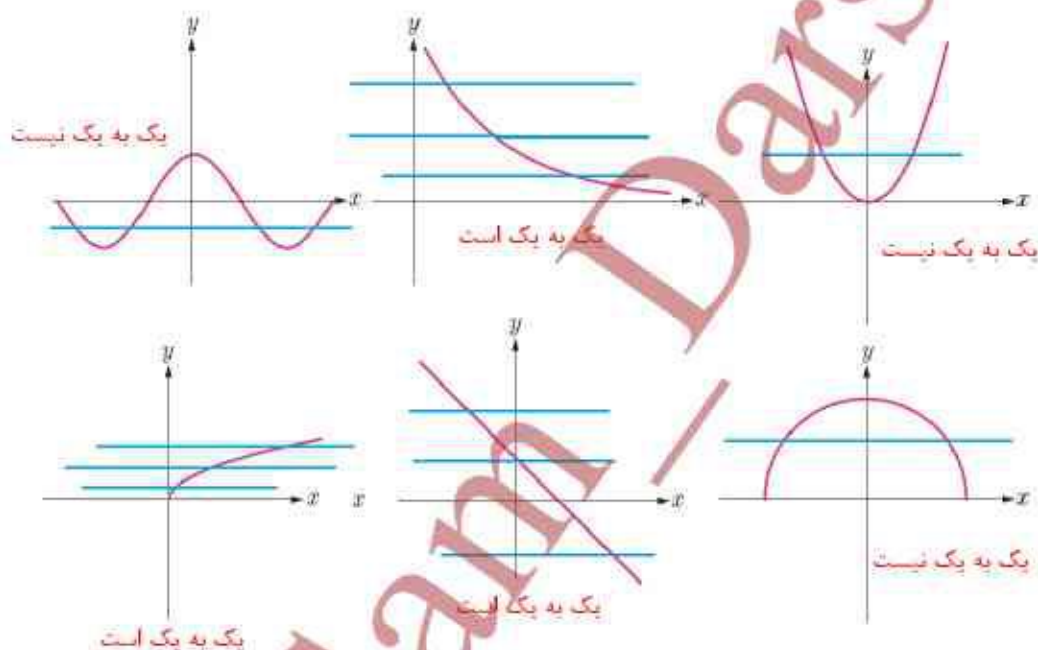
خواندنی

قرن ها پیش رشیدالدین فضل الله همدانی، طبیب و مورخ برجسته ایرانی در کتاب جامع التواریخ به رسم جینی ها در شناسایی افراد از طریق اثر انگشت اشاره کرده و توضیح داده بود که «شواهد و تجربیات نشان می دهد که اثر انگشت هیچ دو نفری کاملاً یکسان نیست». در آن زمان در ایران نیز از اثر انگشت سست برای مهر کردن اسناد استفاده می کردند. در اوایل قرن بیستم، غربی ها نیز با الهام گرفتن از شرقی ها برای شناسایی در تحقیقات جنایی از اثر انگشت بهره گرفتند. امروزه تشخیص اثر انگشت به عنوان یکی از دقیق ترین و سریع ترین روش بیومتریک در حفظ امنیت سیستم های کنترل دسترسی و همچنین در ساعات های حضور و غیاب، کاربرد بسیاری دارد.



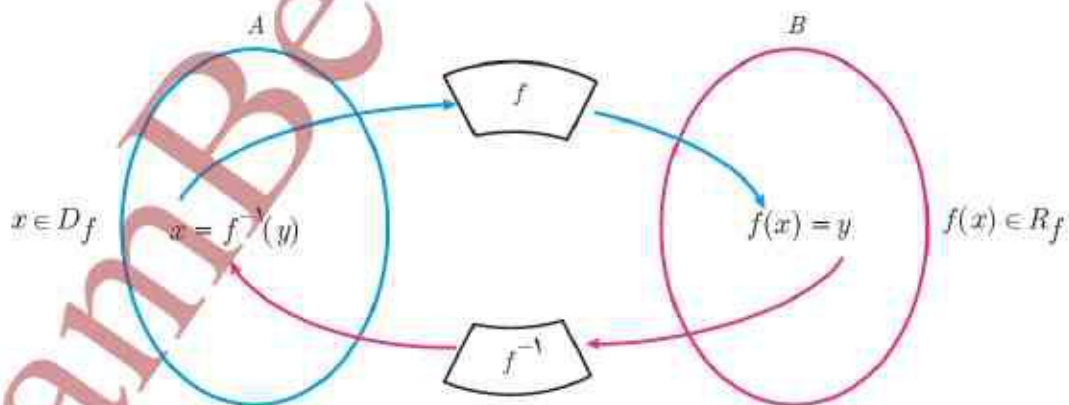
برای تشخیص دادن این که یک تابع یک به یک است یا خیر کافی است خط یا خطوطی موازی محور طول ها (x ها) رسم کنیم اگر نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند می گوییم تابع یک به یک نیست.

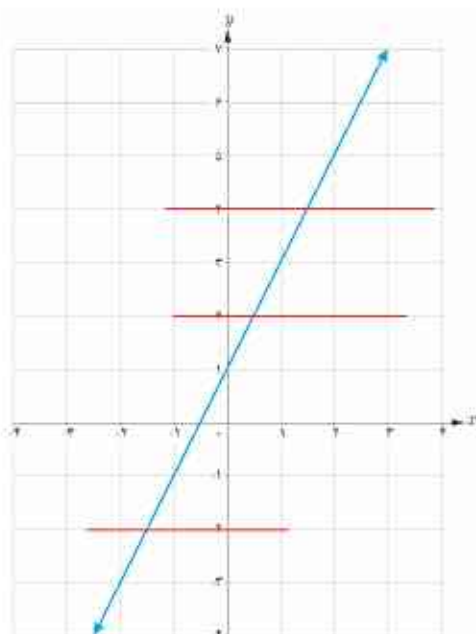
۲ کدام یک از توابع زیر یک به یک است؟



به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت

اگر f تابعی یک به یک باشد و f^{-1} تابع وارون آن باشد، نمودار زیر ارتباط f و f^{-1} را نشان می دهد. (R_f نماد برد تابع f است).





تابع با ضابطه $f(x) = 2x + 1$ را در نظر می‌گیریم.

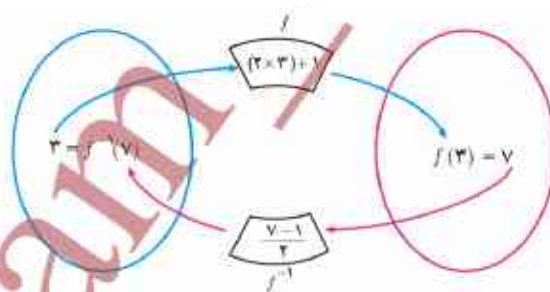
الف) به کمک نمودار f توضیح دهید که چرا f یک به یک است.

همانطور که مشاهده می‌شود اگر خط یا خطوطی موازی محور طول‌ها رسم کنیم نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

ب) نمودار زیر را توضیح دهید:

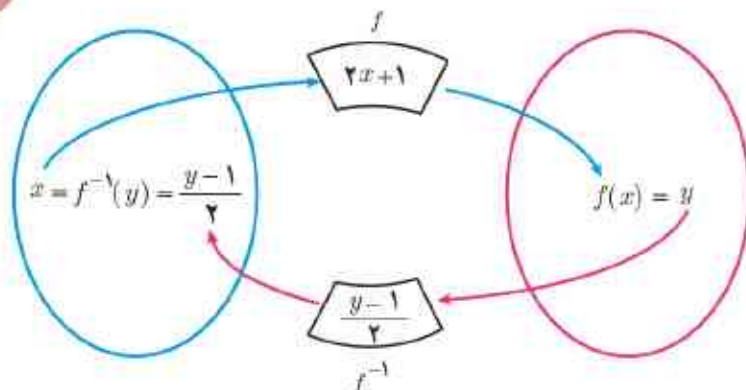
$$(3, 7) \in f \quad \text{و} \quad (7, 3) \in f^{-1}$$

به عبارت دیگر $f(3) = 7$ و $f^{-1}(7) = 3$



۳ عضوی از دامنه تابع f است که با توجه به ضابطه تابع f ابتدا دو برابر می‌شود سپس یک واحد به آن اضافه می‌شود و مقدار ۷ به دست می‌آید که ۷ است. حالا عدد ۷ عضوی از برد تابع f است و عضوی از دامنه تابع f^{-1} است که از آن یک واحد کم می‌شود سپس حاصل نصف می‌شود تا عدد ۳ به دست آید. که عدد ۳ حالا عضوی از برد تابع f^{-1} است.

ب) در حالت کلی برای هر عضو دامنه تابع با ضابطه $f(x) = 2x + 1$ داریم:



ت) بنابراین می‌توان نوشت:

$$f(x) = 2x + 1 \quad (x \in D_f)$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2} \quad (y \in R_f)$$

آنچه که اهمیت دارد این است که دامنه f^{-1} همان برد f است. بنابراین یک نمایش مناسب برای f^{-1} به صورت زیر است:

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

به طور کلی :

برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت مانند f ، در معادله $y = f(x)$ را بر حسب y محاسبه می کنیم. سپس با جابه جا کردن y و x ، ضابطه تابع $f^{-1}(x)$ را به دست می آوریم.

وارون تابع با ضابطه $f(x) = 2x + 1$ ، چنین محاسبه می شود :

$$f(x) = 2x + 1 \Rightarrow y = 2x + 1$$

$$\Rightarrow 2x = y - 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{y - 1}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y - 1}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$$

کار در کلاس

۱) هر تابع خطی غیر ثابت یک به یک است. (چرا؟) وارون هر یک از توابع خطی زیر را به دست آورید.

توابع خطی غیر ثابت یک به یک هستند زیرا هرگاه خطی موازی محور x ها رسم کنیم نمودار را فقط در یک نقطه قطع می کند.

اما نمودار توابع ثابت خطی موازی محور طول ها است و هر دو زوج مرتب متفاوت دارای مؤلفه دوم یکسان هستند. پس نمی تواند یک به یک باشد.

$$y = 4x \Rightarrow 4x = y$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4}y \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x$$

$$g(x) = 4x \text{ (ب)}$$

$$y = x + 5 \Rightarrow x + 5 = y$$

$$\Rightarrow x = y - 5 \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 5$$

$$f(x) = x + 5 \text{ (الف)}$$

$$v(x) = \frac{2}{3}x - 4 \text{ (ت)}$$

$$y = \frac{2}{3}x - 4 \Rightarrow y = \frac{2x - 12}{3} \Rightarrow 3y = 2x - 12$$

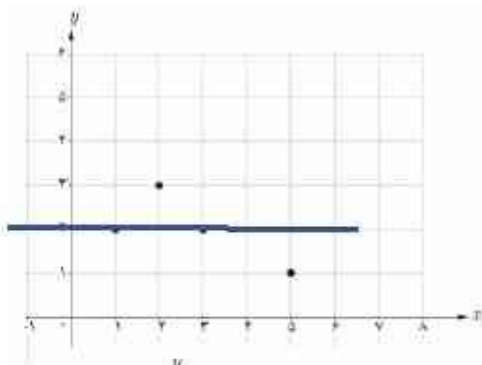
$$\Rightarrow 2x - 12 = 3y \Rightarrow 2x = 3y + 12 \Rightarrow x = \frac{3y + 12}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x + 12}{2}$$

$$u(x) = 2x + 3 \text{ (پ)}$$

$$y = 2x + 3 \Rightarrow 2x + 3 = y$$

$$\Rightarrow 2x = y - 3 \Rightarrow x = \frac{y - 3}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 3}{2}$$



۲ الف) چرا نمودار داده شده، نمودار یک تابع یک به یک نیست؟

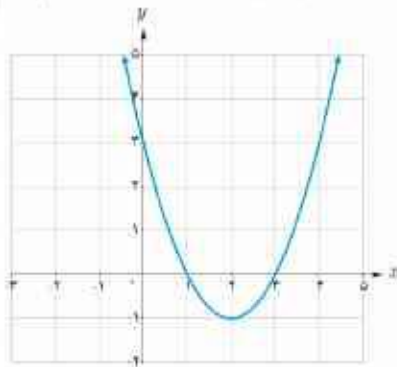
زیرا اگر خطی مانند $y = 2$ را رسم کنیم نمودار را در دو نقطه قطع می کنند.

ب) با حذف تنها یک نقطه، نمودار مقابل را به یک تابع یک به یک تبدیل کنید.

مسئله چند جواب دارد؟

می توانیم نقطه $(3, 2)$ یا $(1, 2)$ را حذف کنیم تا نمودار تبدیل به یک تابع شود.

کار در کلاس



الف) به نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 4x + 3$ در شکل مقابل، دقت کنید.

با محدود کردن دامنه این تابع روی کدام بازه های زیر می توان یک تابع یک به یک ساخت؟

☐ $[1, 4)$

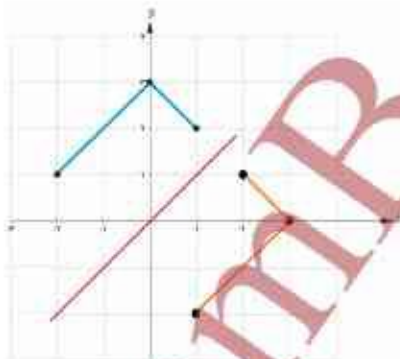
☒ $[0, 2]$

ب) آیا هر تابع درجه ۲، تابعی یک به یک است؟ چرا؟

در حالت کلی خیر زیرا وقتی خطی موازی محور طول ها رسم می کنیم نمودار را در دو نقطه قطع می کند، مگر اینکه دامنه تابع را محدود کنیم.

تمرین

۱ وارون تابع $f = \{(2, 3), (-2, 1), (-1, 2)\}$ را به دست آورید. $f^{-1} = \{(3, 2), (1, -2), (2, -1)\}$



۲ نمودار وارون تابع داده شده در شکل مقابل را رسم کنید.

۳ ضابطه وارون هر یک از توابع با ضابطه های زیر را بیابید.

ب) $f(x) = \frac{3}{5}x + 4$

$$y = \frac{3}{5}x + 4 \Rightarrow 5y = 3x + 20 \Rightarrow 3x + 20 = 5y$$

$$\Rightarrow 3x = 5y - 20 \Rightarrow x = \frac{5y - 20}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{5x - 20}{3}$$

$$y = \frac{-7x + 3}{5} \Rightarrow 5y = -7x + 3 \Rightarrow 7x = -5y + 3 \Rightarrow x = \frac{-5y + 3}{7} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-5x + 3}{7}$$

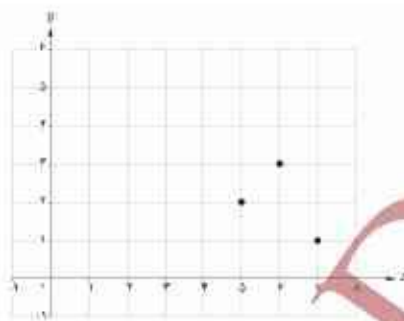
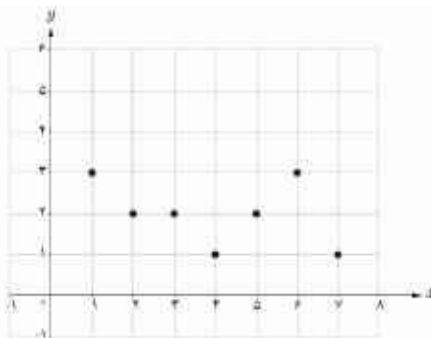
الف) $f(x) = 5x - 2$

$$y = 5x - 2 \Rightarrow 5x - 2 = y \Rightarrow 5x = y + 2$$

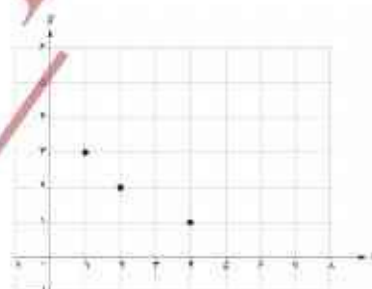
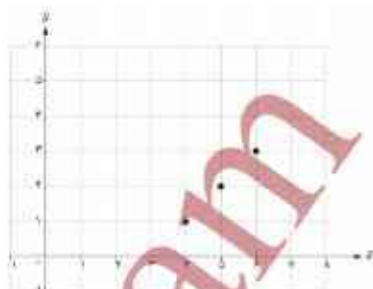
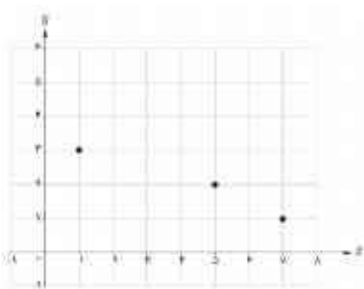
$$\Rightarrow x = \frac{y + 2}{5} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{5}$$

ج) $f(x) = \frac{-7x + 3}{5}$

۴ می‌خواهیم با حذف تعدادی از نقاط نمودار مقابل، آن را به یک تابع یک‌به‌یک تبدیل کنیم. حداکثر چند نقطه می‌تواند باقی بماند؟



حداکثر ۳ نقطه می‌تواند باقی بماند.
در شکل‌های زیر چند حالت را رسم کرده ایم.



۵ نمودار تابعی با دامنه $[0, 2]$ و برد $[2, 5]$ را رسم کنید:

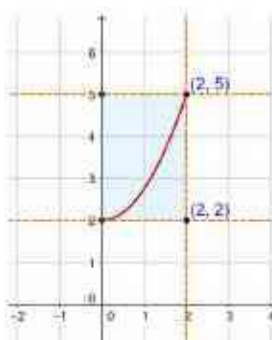
(الف) به شرطی که این تابع یک‌به‌یک باشد.

نمودار تابع‌هایی مانند $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2$ و $f(x) = \frac{5}{4}x$ ، $g(x) = \frac{-3}{4}x + 5$ و برد $[2, 5]$ یک‌به‌یک است.

البته بی‌شمار تابع خطی و غیر خطی یک‌به‌یک می‌توان پیدا کرد.

(ب) به شرطی که این تابع یک‌به‌یک نباشد.

نمودار تابع $f(x) = 2x^2 - 6x + 5$ یا دامنه $[0, 2]$ و برد $[2, 5]$ رسم شده است این تابع یک‌به‌یک نیست.



۶ با حذف بخشی از نمودار نیم‌دایره داده شده، نمودار یک تابع یک‌به‌یک را مشخص کنید.

دامنه تابع نیم‌دایره $[-2, 2]$ است اگر دامنه

را به صورت $[0, 2]$ یا $[-2, 0]$ محدود کنیم

آنگاه نمودار یک تابع یک‌به‌یک را مشخص

می‌کند.



اگر f و g به ترتیب دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند، در این صورت جمع، تفریق، ضرب و تقسیم آنها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

نام عمل	تعریف ضابطه	تعریف دامنه
جمع	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	$D_{f+g} = D_f \cap D_g$
تفریق	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	$D_{f-g} = D_f \cap D_g$
ضرب *	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$
تقسیم	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$

فعالیت

اگر $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = x - 2$ ، آن‌گاه مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و حاصل تقسیم آنها $\left(\frac{f}{g}\right)$ را به دست آورید و دامنه هر یک را مشخص کنید.

حل:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (2x - 1) + (x - 2) = 3x - 3$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (2x - 1) - (x - 2) = x + 1$$

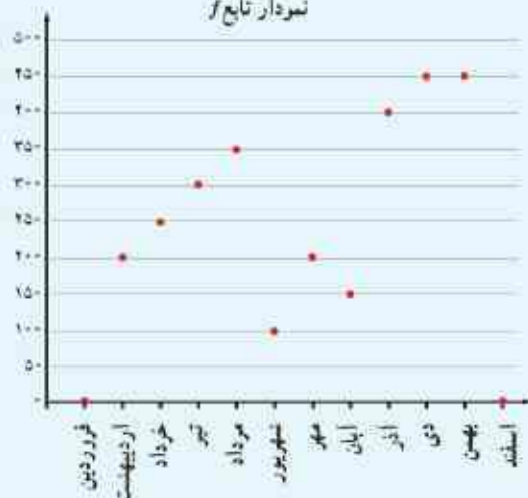
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (2x - 1) \cdot (x - 2) = 2x^2 - 5x + 2$$

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(2x - 1)}{(x - 2)}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\} = (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) - \{x \mid x - 2 = 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

* ضرب دو تابع f و g را با نمادهای $f \cdot g$ یا fg هم نشان می‌دهند.

نمودار تابع f نمودار تابع g نمودار تابع c 

خواندنی

علی در یک کارگاه خانگی، محصولات دست‌دوز چرمی تولید می‌کند. او بخشی از مواد و لوازم مورد نیاز خود را از فروشگاه چرم و بخشی را از فروشگاه ابزار و یراق خریداری می‌کند. وی پس از تولید محصولات، آنها را در بازارچه‌های کارآفرینی به فروش می‌رساند. نمودارهای زیر مقدار خرید او را در یک سال نشان می‌دهد. نمودار تابع f نشان می‌دهد که در هر ماه سال گذشته، چند هزار تومان چرم خریداری شده است؛ برای مثال با توجه به شکل، $f(3) = 300$ ، پس این هنرمند در چهارمین ماه سال، ۳۰۰ هزار تومان چرم خریده است.

نمودار تابع g نشان می‌دهد که این هنرمند در هر ماه سال گذشته چند هزار تومان ابزار و یراق خریده است.

پس در واقع هزینه‌ای که علی در کارگاه خود دارد، شامل دو بخش است: هزینه چرم و هزینه ابزار و یراق.

به زبان ساده، «هزینه» او شامل قیمت همه مواد و لوازم خریداری شده است. در شکل روبه‌رو نمودار تابع هزینه خرید علی در سال گذشته رسم شده است. این تابع را با c نشان می‌دهیم.

الف) بر روی شکل، درستی مقدارهای تابع c را برای ماه‌های فصل زمستان بررسی کنید.

ب) آیا برای هر x در دامنه تابع c ، $c(x) = f(x) + g(x)$ درست است؟

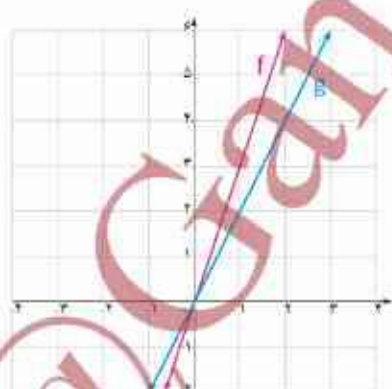
همچنان که می‌بینید برای به‌دست آوردن مقادیر تابع c ، مقادیر دو تابع f و g را با هم جمع می‌کنیم.

۱ درباره دو تابع با ضابطه $f(x) = x^2 + 3x + 1$ و $g(x) = x - 3$ جدول زیر را کامل کنید.

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x) = x^2 + 4x - 2$	$D_{f+g} = \mathbb{R}$
$f-g$	$(f-g)(x) = x^2 + 2x + 4$	$D_{f-g} = \mathbb{R}$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 3$	$D_{f \cdot g} = \mathbb{R}$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 3}$	$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{3\}$

۲ درباره دو تابع با ضابطه $u(x) = \sqrt{x} + 1$ و $v(x) = x - 1$ جدول زیر را کامل کنید.

تابع	ضابطه	دامنه
$u+v$	$(u+v)(x) = \sqrt{x} + 1 + x - 1 = \sqrt{x} + x$	$D_{u+v} = [0, +\infty) \cap \mathbb{R} = [0, +\infty)$
$u-v$	$(u-v)(x) = \sqrt{x} + 1 - (x - 1) = \sqrt{x} - x + 2$	$D_{u+v} = [0, +\infty) \cap \mathbb{R} = [0, +\infty)$
$u \cdot v$	$(u \cdot v)(x) = (\sqrt{x} + 1)(x - 1) = \sqrt{x}(x - 1) + x - 1$	$D_{u+v} = [0, +\infty) \cap \mathbb{R} = [0, +\infty)$
$\frac{u}{v}$	$\left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 1}$	$D_{u+v} = ([0, +\infty) \cap \mathbb{R}) - \{1\}$ $= [0, +\infty) - \{1\}$



مطابق شکل، دو تابع f و g به ترتیب با رنگ‌های قرمز و آبی نشان داده شده‌اند.
الف) ضابطه دو تابع f و g را به دست آورید.

$$g(x) = 2x$$

$$f(x) = 2x + 3$$

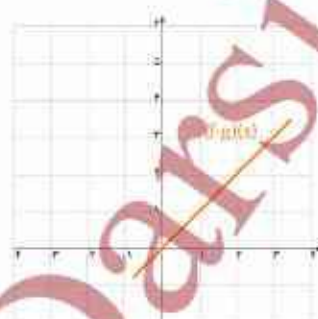
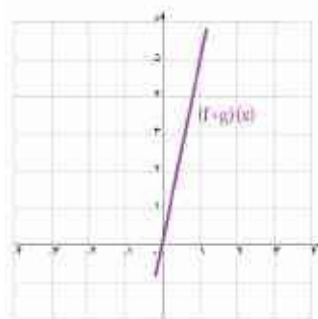
ب) ضابطه دو تابع $f+g$ و $f-g$ را به دست آورید.

$$(f+g)(x) = 2x + 2x = 4x$$

$$(f-g)(x) = 2x - 2x = 0$$

ب) با تکمیل جدول مقابل، نمودارهای توابع $f+g$ و $f-g$ را با رنگ‌های مختلف رسم کنید.

x	۰	۱
$f(x)$	۰	۳
$g(x)$	۰	۲
$(f+g)(x)$	۰	۵
$(f-g)(x)$	۰	۱



ت) آیا جمع دو تابع خطی همیشه یک تابع خطی است؟ در مورد تفریق آنها چه می‌توان گفت؟
بله جمع دو تابع خطی همیشه یک تابع خطی است.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax + b \\ g(x) = a'x + b' \end{array} \right\} \Rightarrow (f+g)(x) = ax + b + a'x + b'$$

$$(f+g)(x) = (a+a')x + (b+b') \xrightarrow{\substack{a+a'=A \\ b+b'=B}} (f+g)(x) = Ax + B$$

بله تفریق دو تابع خطی همیشه یک تابع خطی است.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax + b \\ g(x) = a'x + b' \end{array} \right\} \Rightarrow (f-g)(x) = (ax + b) - (a'x + b')$$

$$(f-g)(x) = (a-a')x + (b-b') \xrightarrow{\substack{a-a'=A \\ b-b'=B}} (f-g)(x) = Ax + B$$

$$\xrightarrow{\substack{a-a'=0 \\ b-b'=B}} (f-g)(x) = B$$

$$\xrightarrow{\substack{a-a'=0 \\ b-b'=0}} (f-g)(x) = 0$$

فعالیت

با توجه به شکل دیده می‌شود که $l(x) = \frac{1}{3}f(x)$. جاهای خالی را پر کنید.

$$g(x) = \dots f(x)$$

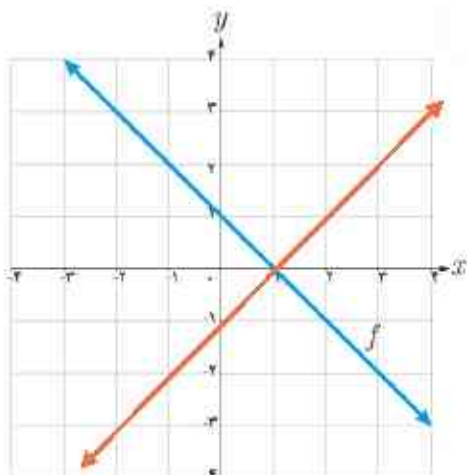
$$h(x) = \dots f(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x + 1, \quad l(x) = \frac{1}{9}x + \frac{1}{3}, \quad h(x) = x + 3, \quad g(x) = \frac{2}{3}x + 3$$

$$\Rightarrow l = \frac{1}{3}f, \quad h = 3f, \quad g = 3l$$

با توجه به نمودار فوق ملاحظه می‌شود که:

اگر k عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطه $y = f(x)$ را k برابر کنیم.



۱ با توجه به نمودار تابع با ضابطه $y = f(x)$ در شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطه $y = -f(x)$ را رسم کنید.

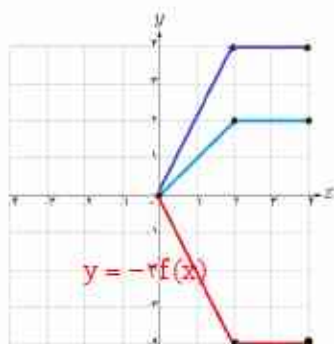
$$y = f(x) \Rightarrow f(0) = 1, f(1) = 0$$

$$y = -f(x) \Rightarrow y = -f(0) = -1 \Rightarrow (0, -1)$$

$$y = -f(x) \Rightarrow y = -f(1) = 0 \Rightarrow (1, 0)$$

۲ عبارت زیر را کامل کنید.

برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = -f(x)$ کافی است قرینه نمودار تابع ضابطه $y = f(x)$ را نسبت به محور طول ها (x ها) رسم کنیم.



۳ در شکل روبه‌رو، نمودار تابع f داده شده است. نمودار تابع با ضابطه $y = -2f(x)$ را رسم کنید.

ابتدا عرض هر نقطه را ۲ برابر می‌کنیم و نمودار جدید را رسم می‌کنیم. سپس قرینه نقاط جدید را نسبت به محور طول ها (x ها) به دست می‌آوریم و نقاط را به هم وصل می‌کنیم.

۱ با استفاده از نمودار تابع با ضابطه $f(x) = |x|$ ، نمودار هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.

الف) $g(x) = -|x|$

ب) $h(x) = -|x-3|$

پ) $l(x) = 2|x-2|$

الف) $g(x) = -f(x)$

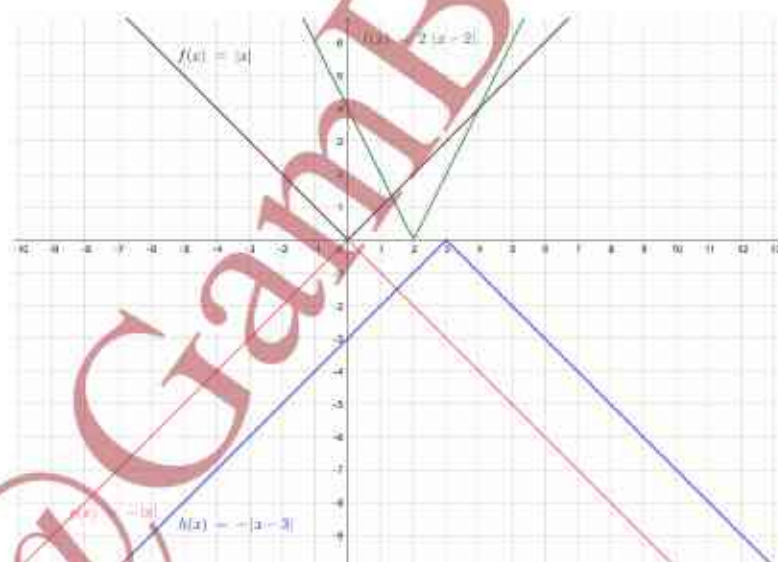
کافی است نمودار تابع f را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم.

ب) $h(x) = -f(x-3)$

باید نمودار تابع f را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم و ۳ واحد روی محور طول ها به سمت مثبت ها حرکت کنیم.

پ) $l(x) = 2f(x-2)$

باید نمودار تابع f را روی محور طول ها ۲ واحد به سمت مثبت ها حرکت داده و به ازای هر طول عرض را دو برابر کنیم.



۲ در هر مورد، دامنه و ضابطه حاصل جمع، ضرب، تقسیم و تفریق دو تابع داده شده را بیابید.

الف) $g(x) = x$ و $f(x) = |x|$

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x) = x + x$	$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$
$f-g$	$(f-g)(x) = x - x$	$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = x \cdot x = x x $	$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{ x }{x}$	$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$

ب) $g(x) = x+2$ و $f(x) = x^2 - 4$

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x) = x^2 - 4 + x + 2 = x^2 + x - 2$	$D_{f+g} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$
$f-g$	$(f-g)(x) = x^2 - 4 - (x+2) = x^2 - x - 6$	$D_{f-g} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = (x^2 - 4)(x+2) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$	$D_{f \cdot g} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 4}{x+2} = x - 2$	$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-2\}$

پ) $g(x) = -\sqrt{x}$ و $f(x) = \sqrt{x}$

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x) = \sqrt{x} + (-\sqrt{x}) = 0$	$D_{f+g} = [0, +\infty)$
$f-g$	$(f-g)(x) = \sqrt{x} - (-\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}$	$D_{f-g} = [0, +\infty)$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = \sqrt{x} \cdot (-\sqrt{x}) = -x$	$D_{f \cdot g} = [0, +\infty)$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{-\sqrt{x}} = -1$	$D_{\frac{f}{g}} = [0, +\infty) - \{0\} = (0, +\infty)$

$$f(x) = \frac{x-2}{x+5} \quad g(x) = x^2 + 3x - 1 \quad \text{ت}$$

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x) = \frac{x^2 + 4x^2 + 6x - 52}{x+5}$	$D_{f+g} = \mathbb{R} - \{-5\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} - \{-5\}$
$f-g$	$(f-g)(x) = \frac{-x^2 - 4x^2 - 4x + 48}{x+5}$	$D_{f-g} = \mathbb{R} - \{-5\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} - \{-5\}$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = (x-2)^2$	$D_{f \cdot g} = \mathbb{R} - \{-5\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} - \{-5\}$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{(x+5)^2}$	$D_{\frac{f}{g}} = (\mathbb{R} - \{-5\}) \cap \mathbb{R} - \{2\}$ $= \mathbb{R} - \{-5, 2\}$

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= \frac{x-2}{x+5} + x^2 + 3x - 1 = \frac{x-2+x^2+3x^2-10x+5x^2+15x-50}{x+5} \Rightarrow (f+g)(x) = \frac{x^2+4x^2+6x-52}{x+5} \\ (f-g)(x) &= \frac{x-2}{x+5} - (x^2+3x-1) = \frac{x-2-x^2-3x^2+10x-5x^2-15x+50}{x+5} \Rightarrow (f-g)(x) = \frac{-x^2-4x^2-4x+48}{x+5} \\ (f \cdot g)(x) &= \left(\frac{x-2}{x+5}\right)(x^2+3x-1) = \frac{(x-2)}{(x+5)}(x+5)(x-2) \Rightarrow (f \cdot g)(x) = (x-2)^2 \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \left(\frac{x-2}{x+5}\right) \div (x^2+3x-1) = \frac{(x-2)}{(x+5)} \times \frac{1}{(x+5)(x-2)} \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{(x+5)^2} \end{aligned}$$

$$f = \{(2, 5), (3, 4), (0, -2)\} \quad g = \{(-1, 2), (0, 3), (2, 4), (3, 0)\} \quad \text{ث}$$

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x) = \{(2, 9), (3, 7), (0, 1)\}$	$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{0, 2, 3\}$
$f-g$	$(f-g)(x) = \{(2, 1), (3, 4), (0, -5)\}$	$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{0, 2, 3\}$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = \{(2, 20), (3, 0), (0, -6)\}$	$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = \{0, 2, 3\}$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \{(2, \frac{5}{4}), (0, -\frac{2}{3})\}$	$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x g(x) = 0\} = \{0, 2\}$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} f(2) &= 5 \\ g(2) &= 4 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow (f+g)(2) = 5+4=9 & \left. \begin{aligned} f(2) &= 5 \\ g(2) &= 4 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow (f-g)(2) = 5-4=1 & \left. \begin{aligned} f(2) &= 5 \\ g(2) &= 4 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow (f \cdot g)(2) = 5 \times 4 = 20 & \left. \begin{aligned} f(2) &= 5 \\ g(2) &= 4 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{5}{4} \\ \left. \begin{aligned} f(3) &= 4 \\ g(3) &= 0 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow (f+g)(3) = 4+0=4 & \left. \begin{aligned} f(3) &= 4 \\ g(3) &= 0 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow (f-g)(3) = 4-0=4 & \left. \begin{aligned} f(3) &= 4 \\ g(3) &= 0 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow (f \cdot g)(3) = 4 \times 0 = 0 & \left. \begin{aligned} f(3) &= 4 \\ g(3) &= 0 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{4}{0} \\ \left. \begin{aligned} f(0) &= -2 \\ g(0) &= 3 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow (f+g)(0) = -2+3=1 & \left. \begin{aligned} f(0) &= -2 \\ g(0) &= 3 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow (f-g)(0) = -2-3=-5 & \left. \begin{aligned} f(0) &= -2 \\ g(0) &= 3 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow (f \cdot g)(0) = -2 \times 3 = -6 & \left. \begin{aligned} f(0) &= -2 \\ g(0) &= 3 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(0) = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

۳ با استفاده از نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، هر یک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

ب) $t(x) = -3\sqrt{x}$

ب) $s(x) = -\sqrt{x-2}$

الف) $r(x) = 2\sqrt{x}$

ث) $v(x) = 1 - \sqrt{x-3}$

ت) $u(x) = 1 - \sqrt{x}$

الف) با توجه به این که $r(x) = 2f(x)$ کافی است عرض های هر نقطه از نمودار f را دو برابر کنیم.

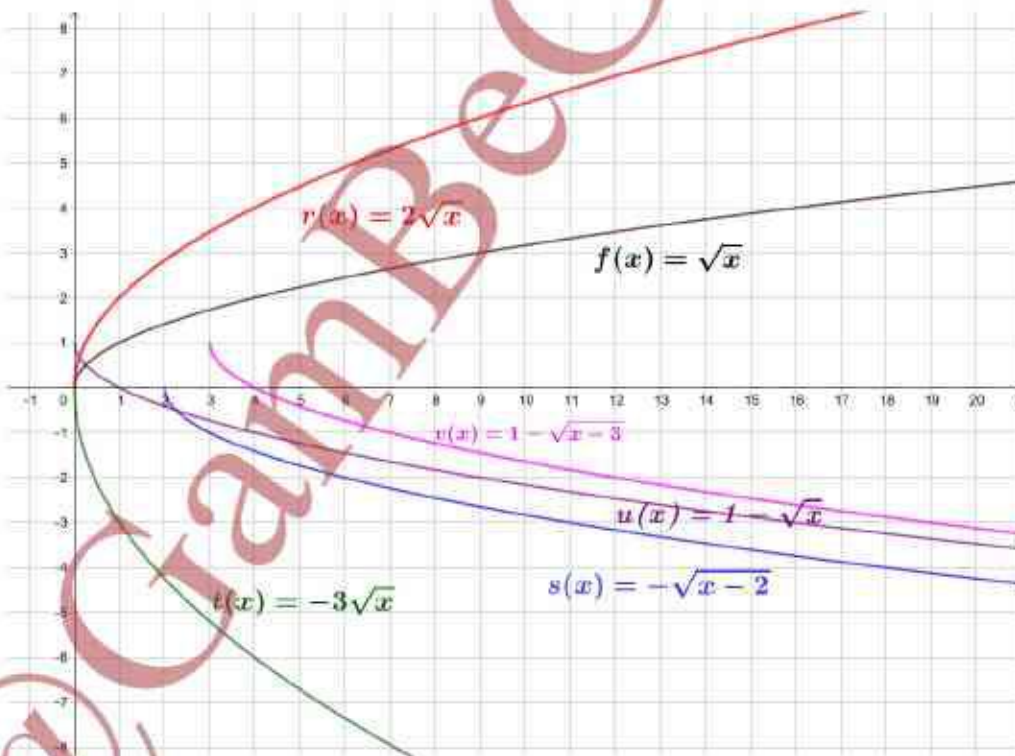
ب) با توجه به این که $s(x) = -f(x-2)$ کافی است ابتدا نمودار f را به اندازه ۲ واحد روی محور طول ها به سمت

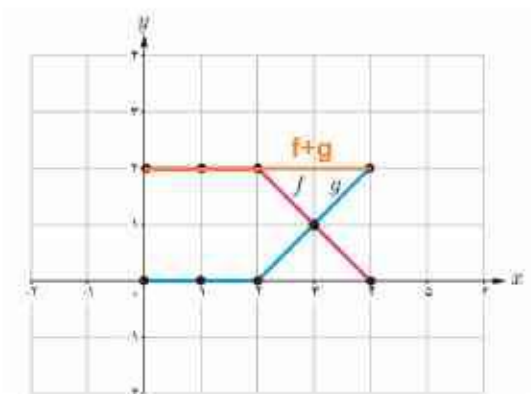
مثبت ها انتقال دهیم سپس آن را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم.

پ) با توجه به این که $t(x) = -3f(x)$ کافی است ابتدا عرض های هر نقطه از نمودار f را سه برابر کنیم سپس نمودار را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم.

ت) با توجه به این که $u(x) = -f(x) + 1$ کافی است ابتدا نمودار f را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم سپس نمودار جدید را به اندازه ۱ واحد روی محور عرض ها به سمت مثبت ها انتقال دهیم.

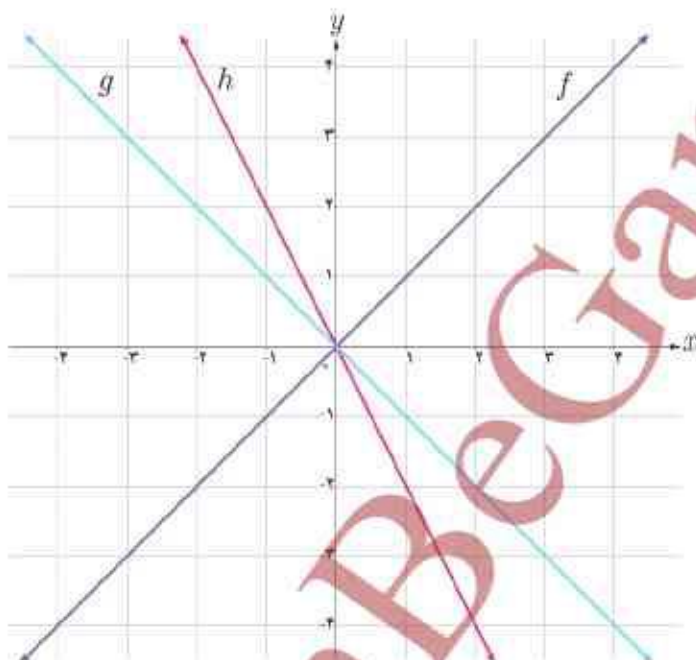
ث) با توجه به این که $v(x) = -f(x-3) + 1$ کافی است ابتدا نمودار f را به اندازه ۳ واحد روی محور طول ها به سمت مثبت ها انتقال دهیم سپس نسبت به محور طول ها قرینه کنیم بعد نمودار جدید را به اندازه ۱ واحد روی محور عرض ها به سمت مثبت ها انتقال دهیم.





۲ در شکل مقابل، نمودار دو تابع f و g رسم شده است. نمودار حاصل جمع این دو تابع را به دست آورید.

۵ با توجه به نمودار سه تابع داده شده، مشخص کنید کدام یک از آنها برابر مجموع دو تابع دیگر است؟



$$\left. \begin{array}{l} f(y) = 1 \\ h(y) = -2 \\ g(y) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(y) + h(y) = g(y) \Rightarrow (f+h)(x) = g(x)$$